Profesor:
Ricardo Espino L.

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

ECUACIONES POLINOMIALES

DEFINICIONES

- Polinomio
- Raíz de un polinomio
- Multiplicidad de raíces
- Ecuación polinomial

TEOREMAS

- Teorema del factor
- Teorema Fundamental del Álgebra
- Descomposición de un polinomio en factores lineales.
- Paridad de raíces
- Fórmulas de Viète

TEOREMAS II

- Suma de potencias de las raíces
- Teorema de Bolzano
- Transformación de raíces

1.- DEFINICIÓN:

Un polinomio real de grado n en la variable X es una suma finita de potencias no negativas de la variable X tomadas con ciertos coeficientes numéricos reales, en los cuales el máximo exponente de la variable X es n.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

Además:

a_0x^n: Término principal

n: grado del polinomio P(x)

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$: Coeficientes

a_0: Coeficiente principal (si $a_0 = 1$ se dice que P(x) es mónico)

a_n: Término Independiente

Ejemplo1:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x - 4$$

Identificando:

$a_0 = 3 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = -5 \quad a_3 = -4$

Ejemplo2:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 8x + 7$$

Completando el polinomio:

$$P(x) = x^4 + x^3 + 0x^2 - 8x + 7$$

Identificando:

$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -8 \quad a_4 = 7$

2.- DEFINICIÓN

Se denomina “valor del polinomio P(x) para x = c” al resultado que se da al reemplazar la variable X por el número “c” y se denota como P(c).

Es decir:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$P(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} \ldots + a_{n-2}c^2 + a_{n-1}c + a_n$$

Ejemplo:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40$$

El valor del polinomio P(x) para x = 3 sería igual a:

$$P(3) = (3)^3 - 7(3)^2 + 2(3) + 40 = 10$$

3.- DEFINICIÓN

Se dice que "c" es raíz de un polinomio P(x) si y solo si P(c)=0. Es decir:

$$c \text{ es raíz del polinomio } P(x) \leftrightarrow P(c) = 0$$

Ejemplo:

Sea el polinomio P(x):

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40$$

Podemos afirmar que 4 es una raíz de P(x) ya que:

$$P(4) = (4)^3 - 7(4)^2 + 2(4) + 40$$

$$P(4) = 64 - 112 + 8 + 40$$

$$P(4) = 0$$

4.- TEOREMA DEL FACTOR

Si c es una raíz de P(x) entonces existe un polinomio Q(x) tal que

$$P(x) = (x - c)Q(x)$$

Es decir, P(x) es factorizable como el producto de dos polinomios los cuales son (x-c) y Q(x), este último calculable por el algoritmo de Ruffini.

Ejemplo

Ya se sabe que 4 es una raíz de:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40$$

Entonces P(x) podrá factorizarse como:

$$P(x) = (x-4)\boldsymbol{Q(x)}$$

Donde Q(x) es un polinomio calculable mediante el algoritmo de Ruffini:

	1	-7	2	40
4	1	4	-12	-40
	1	-3	-10	0

El polinomio **Q(x)** será el cociente resultante al finalizar el algoritmo, es decir:

$$\boldsymbol{Q(x)} = 1x^2 - 3x - 10$$

Finalmente:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40 = (x-4)(x^2 - 3x - 10)$$

Ejercicios:
Encontrar una raíz y factorizar aplicando el Teorema del factor los siguientes polinomios:

1.-$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

2.- T$(x) = x^3 + 3x - 14$

Solución:

$$1.- \quad P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Notamos:

$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

De donde podemos afirmar que 1 es raíz de P(x).

Y por lo tanto aplicando el Teorema del factor:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)Q(x)$$

Calculando Q(x):

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

Finalmente:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Aplicando ASPA SIMPLE podemos continuar la factorización:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Solución:

$$2.- \quad \mathrm{T}(x) = x^3 + 3x - 14$$

Notamos:

$$T(2) = 8 + 6 - 14 = 0$$

De donde podemos afirmar que 2 es raíz de T(x).

Y por lo tanto aplicando el Teorema del factor:

$$\mathrm{T}(x) = x^3 + 3x - 14 = (x - 2)Q(x)$$

Calculando Q(x):

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 3 & -14 \\ 2 & & 2 & 4 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

Finalmente:

$$\mathrm{T}(x) = x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7)$$

Notemos que aquí la factorización no puede continuar usando ASPA SIMPLE.

4.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio con cualesquiera coeficientes numéricos y cuyo grado no sea menor que 1, tiene por lo menos una raíz, generalmente, compleja. Es decir:

$$\forall\, P(x) \in \mathbb{R}[x]\,, \exists\, c \in \mathbb{C}\colon [P(c) = 0]$$

5.- COROLARIO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

Todo polinomio con cualesquiera coeficientes numéricos y cuyo grado “n” no sea menor que 1, tiene en total un total de “n” raíces, generalmente, complejas.

Es decir:

Sea $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2\,, a_3, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

$$\text{Entonces} \quad \exists\, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n \in \mathbb{C} : [P(c_i) = 0, \forall\, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}]$$

Ejemplo:

En el ejercicio anterior, en cuanto al polinomio.

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Encontramos que **1 es una raíz** y utilizando el Teorema del factor se obtuvo:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = \boldsymbol{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

De donde podemos observar que 1 no es la única raíz sino también **2 y 3** también son raíces.

Es decir el polinomio es de 3er grado y tiene 3 raíces las cuales son:

$$\boldsymbol{c_1 = 1, \qquad c_2 = 2, \qquad c_3 = 3}$$

Ejemplo 2:

En el segundo ejercicio anterior, en cuanto al polinomio.

$$\mathrm{T}(x) = x^3 + 3x - 14$$

Encontramos que **2 es una raíz** y utilizando el Teorema del factor se obtuvo:

$$\mathrm{T}(x) = x^3 + 3x - 14 = \boldsymbol{(x-2)(x^2+2x+7)}$$

De donde podemos observar que 2 no es la única raíz sino también hay dos raíces complejas las cuales se pueden calcular de la siguiente forma:

$$x^2 + 2x + 7 = 0$$

Usando la fórmula general:

$$\boldsymbol{x = -1 + \sqrt{6}i}$$
$$\boldsymbol{x = -1 - \sqrt{6}i}$$

Finalmente las tres raíces son:

$$\boldsymbol{c_1 = 2, \quad c_2 = -1 + \sqrt{6}i \ , c_3 = -1 + \sqrt{6}i}$$

OBSERVACIÓN:

También se puede observar algunos casos especiales como el siguiente:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$$

Donde podemos observar que **4 es una raíz** y que aplicando el teorema del factor podemos obtener:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (\boldsymbol{x} - \mathbf{4})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{4})$$

Al continuar con la factorización obtenemos:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (\boldsymbol{x} - \mathbf{4})(\boldsymbol{x} - \mathbf{4})(\boldsymbol{x} + \mathbf{1})$$

Es decir:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (\boldsymbol{x} - \mathbf{4})^{\mathbf{2}}(x + 1)$$

Por lo tanto las 3 raíces de este polinomio son:

$$\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}} = \mathbf{4}, \boldsymbol{c}_{\mathbf{2}} = \mathbf{4}, \boldsymbol{c}_{\mathbf{3}} = -\mathbf{1}$$

Donde observamos que el polinomio tiene 3 raíces pero 2 de estas son iguales a 4. Por ese motivo se puede decir que 4 es una **RAÍZ DOBLE**

6.- MULTIPLICIDAD DE RAÍCES

Se dice que c es una raíz de multiplicidad k de P(x) si y solo si:

$$P(x) = (x - c)^k Q(x) \quad \wedge \quad Q(c) \neq 0$$

Ejemplo:

$$P(x) = (\boldsymbol{x} - \mathbf{5})^{\mathbf{3}}(x - 1)^2(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})$$

P(x) es el producto de tres polinomios de grado **3**, **2** y **1** respectivamente.

Por lo tanto P(x) es un polinomio de grado 6

Aplicando el Corolario del Teorema Fundamental, debe tener 6 raíces, las cuales son:

$$\boldsymbol{c_1} = \mathbf{5}, \boldsymbol{c_2} = \mathbf{5}, \boldsymbol{c_3} = \mathbf{5}, c_4 = 1, c_5 = 1, \boldsymbol{c_6} = -\mathbf{3}$$

5 es una raíz de multiplicidad 3 o RAÍZ TRIPLE

1 es una raíz de multiplicidad 2 o RAÍZ DOBLE

-3 es una RAÍZ SIMPLE

7.- DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES LINEALES

Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R} \land a_0 \neq 0$$

$$y\ sean \quad c_1, c_2, c_3, \dots c_n \quad las\ raíces\ de\ P(x)$$

$$Entonces\ P(x)\ \ puede\ factorizarse\ de\ la\ siguiente\ forma:$$

$$P(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_n)$$

Esto ya ha sido observado en muchos ejemplos anteriores:

Como por ejemplo:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

8.- PROPIEDADES DE VIETE:

Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2\,, a_3, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

$$y\ sean \quad c_1, c_2, c_3, \ldots c_n \quad las\ raíces\ de\ P(x)$$

Entonces se cumple:

$$\sigma_1 = \boldsymbol{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = -\frac{a_1}{a_0}}$$

$$\sigma_2 = \boldsymbol{c_1c_2 + c_1c_3 + \cdots + c_{n-1}\, c_n = \frac{a_2}{a_0}}$$

$$\sigma_3 = \boldsymbol{c_1c_2c_3 + \cdots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -\frac{a_3}{a_0}}$$

$$\ldots$$

$$\sigma_k = \sum \boldsymbol{Productos\ de\ las\ raíces\ tomadas\ de\ \mathrm{k}\ en\ \mathrm{k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}}$$

$$\ldots$$

$$\sigma_n = \boldsymbol{c_1c_2c_3 \ldots c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}}$$

Un caso básico de esta propiedad es el caso para los polinomios de 2do y 3er grado.

Sea P(x) un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

$$y\ sean \quad c_1, \quad y \quad c_2 \quad las\ raíces\ de\ P(x)$$

Entonces se cumple:

$$\sigma_1 = c_1 + c_2 = -\frac{a_1}{a_0}$$
$$\sigma_2 = c_1 c_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$
$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2\,, a_3\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

$$y\ sean \quad c_1, c_2, c_3\ las\ raíces\ de\ P(x)$$

Entonces se cumple:

$$\sigma_1 = c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$
$$\sigma_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 = \frac{a_2}{a_0}$$
$$\sigma_3 = c_1c_2c_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

9.- SUMA DE POTENCIAS DE LAS RAÍCES:

Sea el polinomio:

$$P(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

Cuyas raíces son 1 y 2.

Definimos:

$$\boldsymbol{S_k = 1^k + 2^k \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+}$$

Es decir:

$$\boldsymbol{S_1 = 1 + 2 = 3}$$

$$\boldsymbol{S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5}$$

$$\boldsymbol{S_3 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9}$$

$$\boldsymbol{S_4 = 1^4 + 2^4 = 1 + 16 = 17}$$

$$\boldsymbol{S_5 = 1^5 + 2^5 = 1 + 32 = 33}$$

Si tomamos tres sumas consecutivas y las reemplazamos usando los coeficientes del polinomio obtenemos:

Usando S_3, S_2, S_1

$$\boldsymbol{2S_3 - 6S_2 + 4S_1 = 2(9) - 6(5) + 4(3) = 0}$$

Usando S_5, S_4, S_3

$$\boldsymbol{2S_5 - 6S_4 + 4S_3 = 2(33) - 6(17) + 4(9) = 0}$$

Generalizando:

Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

$$y\ sean \quad c_1, c_2, c_3, \ldots c_n \quad las\ raíces\ de\ P(x)$$

Definimos:

$$S_k = c_1^k + c_2^k + c_3^k + \cdots + c_n^k \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+$$

Entonces se cumple:

$$a_0S_{k+n} + \cdots + a_{n-2}S_{k+2} + a_{n-1}S_{k+1} + a_nS_k = 0 \forall\, k \in \mathbb{Z}^+$$

10.- PARIDAD DE RAÍCES:

CASO I.- Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

$$y\ sea\ c_1\ una\ raíz\ de\ la\ forma\ c_1 = a + bi, \qquad a.b \in \mathbb{R}$$

Entonces se cumple:

$$Necesariamente\ existirá\ otra\ raíz: a - bi$$

CASO II.- Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Q} \wedge a_0 \neq 0$$

$$y\ sea\ c_1\ una\ raíz\ de\ la\ forma\ c_1 = a + \sqrt{b}, \qquad a \in \mathbb{Q}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}^C$$

Entonces se cumple:

$$Necesariamente\ existirá\ otra\ raíz: a - \sqrt{b}$$

11.- TEOREMA DE BOLZANO

Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$donde \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

$$y\ sean\ a\ y\ b \ \in \ \mathbb{R}\ tales\ que\ P(a).P(b) < 0$$

Entonces se cumple que:

$$\exists\, c \ \in \ ]a; b[\, : [P(c) = 0]$$

Es decir existe una raíz del polinomio que pertenece al intervalo $]a; b[$

Ejemplo:

Sea P(x) el polinomio:

$$P(x) = x^4 - x - 3$$

Si calculamos P(1) se obtiene:

$$P(1) = -3$$

Mientras que si calculamos P(2)

$$P(2) = 11$$

Es decir:

$$\boldsymbol{P(1)P(2) = -3.11 = -33 < 0}$$

Es decir existe una raíz del polinomio que pertenece al intervalo $]1;2[$

12.- TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

Sea P(x) un polinomio:

$$P(x) = x^3 - 7x + 1 \quad con\ raíces\ c_1, c_2, c_3$$

Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean:

$$2c_1 - 1, \qquad 2c_2 - 1, \qquad 2c_3 - 1$$

Solución:

La forma de las raíces $\mathbf{2c_1 - 1,\ \ 2c_2 - 1,\ \ 2c_3 - 1}$ puede ser interpretada como un cambio de variable de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

Despejando x:

$$x = \frac{y + 1}{2}$$

Reemplazando en el polinomio original:

$$P(x) = x^3 - 7x + 1 = \left(\frac{y+1}{2}\right)^3 - 7(y+1) + 1$$

$$\frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 1}{8} - 7y - 7 + 1$$

$$\frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 56y - 48}{8}$$

$$y^3 + 3y^2 - 53y - 47 = 0$$

13- ECUACIONES POLINOMIALES

Una ecuación polinomial es una igualdad de la forma:

$$\boldsymbol{P(x) = 0}$$

En la cual el objetivo es hallar los **valores de la incógnita X que satisfacen dicha igualdad.**

A dichos valores que satisfacen la igualdad se les otorga el nombre de **SOLUCIONES**.

Dichas soluciones se agrupan en un conjunto llamado **CONJUNTO SOLUCIÓN (C.S.)**

2 ecuaciones se denominan equivalentes si y solo si **tienen el mismo conjunto solución.**

Para que dos ecuaciones sean equivalentes **no necesariamente deben ser la misma ecuación.**

En las ecuaciones polinomiales **el número de soluciones no necesariamente coincide con el número de raíces del polinomio.**

Ejemplo1:

$$Resolver\ la\ ecuación:\ \ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Solución:

Factorizando el polinomio:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

Para que el producto tenga como resultado 0, necesariamente uno de los factores debe ser 0, lo cual nos da 3 opciones:

$$(x-1) = 0 \quad \vee \quad (x-2) = 0 \quad \vee \quad (x-3) = 0$$

De donde obtenemos 3 soluciones:

$$x = 1\ \vee x = 2 \vee x = 3$$

Finalmente:

$$C.S. = \{1, 2, 3\}$$

Ejemplo1:

$$Resolver\ la\ ecuación: (x-1)^3(x+4)=0$$

Solución:

Para que el producto tenga como resultado 0, necesariamente uno de los factores debe ser 0, lo cual nos da 2 opciones:

$$(x-1)=0 \quad \vee \quad (x+4)=0$$

De donde obtenemos 2 soluciones:

$$x=1\ \vee x=-4$$

Finalmente:

$$C.S.=\{1,-4\}$$

OBSERVACIÓN: La ecuación posee únicamente 2 soluciones mientras que el polinomio es de 4to grado y posee 4 raíces.

En una ecuación polinomial:

$$\#soluciones \ \leq \#raíces\ del\ polinomio$$

14.- ECUACIÓN CUADRÁTICA

Forma:

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C = 0$$

Las raíces del polinomio se pueden calcular de la siguiente forma:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Definimos:

$$Discriminante: \triangle = B^2 - 4AC$$

Observamos que:

$$\triangle > 0 \;\leftrightarrow\; El\ polinomio\ posee\ 2\ raíces\ reales\ y\ diferentes$$
$$\triangle = 0 \;\leftrightarrow\; El\ polinomio\ posee\ 2\ raíces\ reales\ e\ iguales$$
$$\triangle < 0 \;\leftrightarrow\; El\ polinomio\ posee\ 2\ raíces\ complejas\ y\ conjugadas$$

Sean los dos polinomios:

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$Q(x) = Mx^2 + Nx + P$$

Si P(x) y Q(x) poseen las mismas raíces y todos los coeficientes son diferentes de cero:

$$\frac{A}{M} = \frac{B}{N} = \frac{C}{P}$$

Si P(x) y Q(x) poseen SOLO UNA RAÍZ EN COMÚN

$$(AP - MC)^2 = (AN - MB)(BP - NC)$$

PITAGORAS ACADEMIA

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA #8:

Sean x_1, x_2, x_3 raíces de la ecuación:

$$x^3 - 5x + 12 = 0$$

Calcular:

$$\frac{x_2^3 + 2}{x_2 - 2} + x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3$$

SOLUCIÓN:

1.- Ya que x_2 es una raíz del polinomio $x^3 - 5x + 12$ entonces:

$$x_2^3 - 5x_2 + 12 = 0$$

$$x_2^3 + 2 = 5x_2 - 10 = 5(x_2 - 2)$$

Obtenemos:

$$\frac{x_2^3 + 2}{x_2 - 2} = 5$$

Además por la propiedades de Viéte:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 x_2 x_3 = -12$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{\frac{x_2^3 + 2}{x_2 - 2} + x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3 = 5 + 0 - 12 = -7}$$

PROBLEMA #9:

Determinar el valor de “m”, si las raíces de la ecuación:

$$x^3 - 15x^2 + mx + 5 = 0$$

Están en progresión aritmética.

SOLUCIÓN:

Sean las raíces del polinomio: $\alpha - r$, α, $\alpha + r$

Por las propiedades de Viéte:

$$\alpha - r + \ \alpha + \alpha + r = 15$$
$$\alpha = 5$$

Es decir, 5 es una raíz del polinomio.

Por lo tanto:

$$5^3 - 15(5)^2 + 5m + 5 = 0$$
$$\boldsymbol{m = 49}$$

PROBLEMA #10

Si la ecuación:

$$x^3 + x + 2 = 0$$

Tiene por raíces:

$$x_1, x_2, x_2$$

Calcular:

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + 1$$

SOLUCIÓN#1:

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}+1=\frac{(x_2-1)(x_3-1)+(x_1-1)(x_3-1)+(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)}+1$$

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}+1=\frac{(x_2x_3-x_2-x_3+1)+(x_1x_3-x_1-x_3+1)+(x_1x_2-x_1-x_2+1)}{(x_1x_2x_3-x_2x_3-x_2x_3-x_2x_3+x_1+x_2+x_3-1}+1$$

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}+1=\frac{(x_2x_3-x_2-x_3+1)+(x_1x_3-x_1-x_3+1)+(x_1x_2-x_1-x_2+1)}{(x_1x_2x_3-x_2x_3-x_2x_3-x_2x_3+x_1+x_2+x_3-1}+1$$

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}+1=\frac{(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-2(x_1+x_2+x_3)+3}{(x_1x_2x_3-x_2x_3-x_2x_3-x_2x_3+x_1+x_2+x_3-1}+1$$

Además se sabe:

$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1$$
$$x_1x_2x_3=-2$$

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}+1=\frac{1-2(0)+3}{(-2-1+0-1)}+1=0$$

SOLUCIÓN#2

Hacemos una transformación de raíces, ya que las tres primeras fraciones poseen la forma:

$$y=\frac{1}{x-1}$$

De donde obtenemos despejando:

$$x=\frac{y+1}{y}$$

Reemplazando:

$$\left(\frac{y+1}{y}\right)^3+\frac{y+1}{y}+2=0$$

Operando:

$$4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 0$$

De donde:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} = -\frac{4}{4} = -1$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + 1 = 0}$$

PROBLEMA#11

Hallar la relación entre p y q, para que la ecuación:

$$x^3 + 3px + q = 0; \quad pq \neq 0$$

Tenga una raíz doble.

SOLUCIÓN

Para que el polinomio tenga una raíz doble debe tener la forma:

$$x^3 + 3px + q = (x - \alpha)^2 Q(x)$$

Es decir, si dividimos:

$$\frac{x^3 + 3px + q}{(x-\alpha)^2} = \frac{x^3 + 3px + q}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}$$

Debe dar como resultado una división exacta.

Mediante el algoritmo de Horner:

1	1	0	3p	q
2α		2α	$-\alpha^2$	
$-\alpha^2$			$4\alpha^2$	$-2\alpha^3$
	1	2α	0	0

$$3p - \alpha^2 + 4\alpha^2 = 0 \ldots\ldots p = -\alpha^2$$

$$q - 2\alpha^3 = 0 \ldots q = 2\alpha^3$$

$$p^3 = -\alpha^6$$

$$q^2 = 4\alpha^6$$

$$q^2 = -4p^3 \ldots.\ \mathbf{q^2 + 4p^3 = 0}$$

PROBLEMA#3

03. Dada la ecuación :

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{x-c},$$

si : a; b y c $\in \mathbb{R}^+$ con a > b, la condición que debe cumplirse para que tenga dos raíces diferentes es:

A) $c<a \vee c>b$ B) $c>a \vee c<b$ C) $c>\frac{a+b}{2}$

D) $c<\frac{a+b}{2}$ E) Φ

SOLUCIÓN:

Operando las fracciones obtenemos:

$$\frac{2x-a-b}{x^2-ax-bx+ab}=\frac{1}{x-c}$$

Operando en aspa:

$$x^2-2cx+ac+bc-ab=0$$

Para que esta ecuación cuadrática tenga 2 raíces reales diferentes se debe cumplir:

$$\triangle > 0$$

$$(-2c)^2-4(ac+bc-ab)>0 \ldots .4c^2-4ac-4bc+4ab>0$$

$$c^2-ac-bc+ab>0 \ldots (c-a)(c-b)>0$$

$$Resolviendo\ la\ ecuación: \boldsymbol{x} \in \left]\boldsymbol{0};\boldsymbol{b}\right[\cup \left]\boldsymbol{a};+\infty\right[$$

PROBLEMA#5

05. Dada la ecuación :

$$x^2-5x+c=0;\ c\neq 0$$

cuyas raíces son m y n, encontrar la raiz cúbica cuyas raíces sean:

$$\left\{\frac{m^2-3m}{2m-c};\ m+\frac{c}{m};\ \frac{m^2+n^2-8c}{5-2c}\right\}$$

A) $x^3+11x^2+35x+25=0$
B) $x^3-11x^2+35x-25=0$
C) $x^3+x^2+25x+35=0$
D) $x^3+11x-25x-35=0$
E) $x^3+6x+7x+5=0$

SOLUCIÓN:

Ya que m es raíz del polinomio:

$$x^2-5x+c$$

Al reemplazar x=m debe dar como resultado cero:

$$m^2-5m+c=0$$

De donde:

$$m^2-3m-2m+c=0 \ldots m^2-3m=2m-c$$

$$\boldsymbol{\frac{m^2-3m}{2m-c}=1}$$

Análogamente:

$$m^2-5m+c=0$$

$$m^2+c=5m$$

$$\boldsymbol{m+\frac{c}{m}=5}$$

Además se sabe que:

$$m+n=5 \quad mn=c$$

$$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=25-2c$$

$$\boldsymbol{\frac{m^2+n^2-8c}{5-2c}=\frac{25-2c-8c}{5-2c}=\frac{5(5-2c)}{5-2c}=5}$$

Finalmente:

El polinomio cúbico cuyas raíces son 1, 5 y 5 sería:

$$(x-5)^2(x-1) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$$

PROBLEMA#7

07. Sea el polinomio :

$$F(x)=ax^3+x^2+x+b \; ; \; a\neq 0$$

Determinar los valores de "a" de modo que F(x) admita un cero real, de multiplicidad 2

SOLUCIÓN:

Si el polinomio admite una raíz de multiplicidad 2, se puede expresar como:

$$F(x) = ax^3 + x^2 + x + b = (x-\alpha)^2 Q(x)$$

$$\frac{ax^3 + x^2 + x + b}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2} \; es\ una\ división\ exacta$$

1	a	1	1	b
2α		$2\alpha a$	$-a\alpha^2$	
$-\alpha^2$			$4a\alpha^2 + 2\alpha$	$-2a\alpha^3 - \alpha^2$
	a	$2a\alpha+1$	0	0

Esto significa que:

$$1 - a\alpha^2 + 4a\alpha^2 + 2\alpha = 0$$

$$3a\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$$

Es decir α es también raíz del polinomio:

$$3ax^2 + 2x + 1$$

El cual para tener una raíz real debe cumplir:

$$\triangle > 0$$

$$4 - 12a > 0 \ldots \boldsymbol{a} \in \left]-\infty;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right[- \{\mathbf{0}\}$$

PROBLEMA#19

19. Halle las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación:

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0,$$

sabiendo que son reales positivos y que:

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$$

Indique el valor de r_4

A) 1/2 B) 1/4 C) 5/4

D) 1 E) 2

SOLUCIÓN:

Si r_1, r_2, r_3, r_4 son raíces positivas entonces:

$$r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{5}{4}$$

Además por ser reales positivos deben cumplir:

$$M.A. \geq M.G$$

Donde MA=MG se cumple si y solo todos los números son iguales

$$\frac{\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{r_1}{2}\frac{r_2}{4}\frac{r_3}{5}\frac{r_4}{8}}$$

$$\frac{1}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{\frac{5}{4}}{2.4.5.8}} = \frac{1}{4}$$

Ya que se cumple la igualdad entonces:

$$\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4}$$

De donde: r_4=2

PROBLEMA#18

18. Sea la ecuación polinomial :

$$3x^{125} - 2x^{100} + 4x^{75} - 2 = 0$$

Determine el valor de :

$$S_{25} + S_{50} + S_{125}$$

SOLUCIÓN:

Observando el polinomio podemos identificar:

$$a_0 = 3$$
$$a_{25} = -2$$
$$a_{50} = 4$$
$$a_{125} = -2$$

Recordando:

$$\sigma_k = \sum \boldsymbol{Productos\ de\ las\ raíces\ tomadas\ de\ \mathrm{k}\ en\ \mathrm{k}} = (-\mathbf{1})^k \frac{\boldsymbol{a_k}}{\boldsymbol{a_0}}$$

$$\sigma_{25} = (-\mathbf{1})^{25} \frac{\boldsymbol{a_{25}}}{\boldsymbol{a_0}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$\sigma_{50} = (-\mathbf{1})^{50} \frac{\boldsymbol{a_{50}}}{\boldsymbol{a_0}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

$$\sigma_{125} = (-\mathbf{1})^{125} \frac{\boldsymbol{a_{125}}}{\boldsymbol{a_0}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Finalmente:

$$\sigma_{25} + \sigma_{50} + \sigma_{125} = \frac{8}{3}$$

PROBLEMA#20

20. Si (2 + i) es una raíz de multiplicidad dos del siguiente polinomio :

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 25$$

hallar: a+b+c+d, además a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

A) 17 B) 18 C) 19
D) -18 E) -17

SOLUCIÓN:

Ya que 2+i es una raíz doble esto significa que hay dos raíces iguales a 2+i

Ya que los coeficientes son reales, se cumple la paridad de raíces y por lo tanto deben existir dos raíces iguales a 2-i

Es decir:
4 de las 5 raíces son:

$$r_1 = 2 + i, \qquad r_2 = 2 - i, \qquad r_3 = 2 + i, \qquad r_4 = 2 - i$$

La quinta raíz $r_5$se puede calcular conociendo:

$$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 = -25$$

$$(2 + i)(2 - i)(2 + i)(2 - i)r_5 = -25$$

De donde:$r_5 = -1$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 25 = (x-(2+i))(x-(2-i))\ (x-(2+i))\ (x-(2-i))(x-(-1))$$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 25 = \left(x^2 - 4x + 5\right)^2 (x+1)$$

Reemplazando x=1

1+a+b+c+d+25=8 **a+b+c+d=−18**

OBSERVACIÓN:

El polinomio:

$$x^2 - 4x + 5$$

También pudo obtenerse de la siguiente manera:

$$x = 2 + i \ldots x - 2 = i \ldots \ldots (x-2)^2 = -1$$
$$x^2 - 4x + 4 = -1$$
$$x^2 - 4x + 5 = 0$$